集合论的情况则是这样：

虽然早在之前康托就已发现了康托悖论，也有布拉里-福蒂（Burali-Forti）等悖论，但并没有引起太多注意，直到罗素悖论的发现。一个重构是这样的，朴素集合论（naive set theory）只有两条公理：

* 外延公理： 
* 概括公理（模式）：对于每一个公式  ，

那么就会有



但是，这也并不意味着“数学危机”这种提法很有合理性，

当然，集合论的基础存在着危机，但即使在这里，许多数学家也继续以非形式的方式工作，而不赖于这些悖论的这种或那种解决方案。例如，Hausdorff（1914）的集合论教科书几乎没有提到它们。除非人们已经接受了数学的集合论还原，否则没有理由将其视为数学基础的危机；但在对悖论进行令人满意的解决之前，更自然的反应是将其视为对这种还原的可能性的反驳。（[1], 26）（Certainly there was a crisis inthe foundations of set theory, but even here many mathematicians continued to work informally in ways that did not depend on one resolution or other of the paradoxes: Hausdorff’s (1914) textbook on set theory, for example, barely mentions them. And there is no reason to regard even this as a crisis in the foundations of mathematics more generally unless one already accepts the set-theoretic reduction of mathematics; but in advance of a satisfying resolutionof the paradoxes the more natural reaction would be simply to treat them asa refutation of the possibility of such a reduction.）

zemelo先提出了集合论的公理化，他的主要目的在于以清晰的方式用大家都能接受的选择公理证明佐恩引理以证明良序定理；他的公理化中没有替换公理，这是由Frankel加上去的（司寇伦也独立发现了替换公理），这也是ZFC之所以叫ZFC的原因。正则公理是由[冯诺依曼](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%86%AF%E8%AF%BA%E4%BE%9D%E6%9B%BC&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2302680422%7D)提出的。

布尔巴基学派采用以集合论为基础的方式讲述数学（当然，布尔巴基学派所采用的集合论并不完全是ZFC式的，例如ta们使用了Hilbert的ε算子，也没有采用正则公理；ta们也不是很注重数理逻辑）发挥了重大影响（ta们声称在ta们的形式系统中基数1的非缩写形式的字符数是“个把千个”（Bourbaki 1956, p.55），但实际数字是10^12（Mathias 2002）（They seriously under-estimated just how long, though: they claimed that the num-ber of characters in the unabbreviated term for the cardinal number in their formal system was ‘several tens of thousands’ (Bourbaki 1956, p.55), but theactual number is about 1012(Mathias 2002).）（转引自[1], 18））。

“布尔巴基他们自己承认这本书（关于逻辑和集合论的不加证明的结果的摘要第一卷）是在“痛苦而无趣，但不得不为”的情况下写作的”（p171）

布尔巴基莫里斯·马夏尔湖南科学技术出版社数学家的秘密社团Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians胡作玄 / 王献芬2012

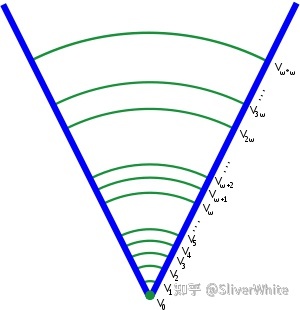
到20世纪60年代，使用公理模式以一阶形式陈述数学理论已经成为标准（The result of this was that by the 1960s it had become standard to state mathematical theories in first-order form using axiom schemes.）（16）。  
如果我们从元理论的角度来看待这个问题，这种不足的原因就很清楚了：在level是V是无限的情况下，二阶分离公理包含了不可数的实例（参见[康托尔定理](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%BA%B7%E6%89%98%E5%B0%94%E5%AE%9A%E7%90%86&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2302680422%7D)9.2.6），而一阶模式只有可数的实例，因为集合论的语言是可数的。（[1], 43）

纯粹集合论式的观点，即集合论宇宙中只有集合而没有个体（individual/atom，例如桌子椅子天使这些东西）除了纯粹性的简便性和对于作为数学基础来说足够（任何数学、抽象或具体对象的组合，无论如何形成，都可以是一个collection（或class），例如一个函数就是其的像/图（graph），如一个从  到  并有  的函数也就是集合  ）以外，许多证明方法在加上个体时无法施用。不过个体的研究价值得以保留下来，Frankel发现了一种方法，可以证明选择公理相对于允许个体的系统ZU的独立性，并被Lindenbaum、Mostowski和Mendelson等人发展。

层谱（hierarchy）式的集合观：

集合的宇宙分层为一系列“阶段”（stages），每个阶段都有一个序号，最低的阶段，即阶段0，由所有没有成员的实体组成。第0阶段唯一有的就是空集。每一个新的阶段中的集合由所有更低的阶段中的元素形成。这些阶段形成了一个嵌套的、有秩序的序列，如果集合的成员关系是传递性的（transitive），就会形成一个层次结构。

层叠集合观（The Iterative Conception of Set）以一种很好的方式避开了罗素、Burali-Forti和Cantor的著名悖论。这些悖论都是由于不加限制地使用了朴素集合理论的原则而产生的。像“所有集合的类”或“所有序数的类 ”这样的集合包括来自迭代层次的所有阶段的集合。因此，这样的集合不可能在任何特定的阶段形成，因此也不可能是集合。



虽然冯诺依曼为其打下了公理基础（V=WF（良基，well-founded）），但对于其的具体的哲学论证

只有当Godel(1947, p.519)不只是像Mirimanoff那样把有根类（grounded collections）作为集合宇宙的一个子宇宙，而是作为一个独立的有动机的层谱（hierarchy），正如他所指出的，“从来没有导致任何[二律背反](https://www.zhihu.com/search?q=%E4%BA%8C%E5%BE%8B%E8%83%8C%E5%8F%8D&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2302680422%7D)”时，事情才开始发生变化。（Matters began to change only when Godel (1947, p.519) presented thegrounded collections not merely, as Mirimanoff had done, as a sub-universe ofthe universe of collections but rather as an independently motivated hierarchywhich, as he pointed out, ‘has never led to any antinomy whatsoever’.Sincethe 1960s the assumption that every collection is grounded has been adopted enthusiastically by set theorists, and the idea that the only coherent conceptionis the iterative one has become widespread.）（[1], 52）

对层叠集合观的经典论证参见收录于[普特南](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%99%AE%E7%89%B9%E5%8D%97&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2302680422%7D)和贝纳塞拉夫编的《数学哲学》中的王浩和boolos的文章。

参考文献：

[1] set theory and its philosophy: A Critical Introduction, Michael Potter, Oxford, 2004.